

# Introduction au 4D-Var comme une extension du 3D-Var

Pierre Gauthier  
 Département des sciences de la Terre et de l'atmosphère

SCA-7216 Introduction à l'assimilation de données

## Quelques limitations à l'interpolation statistique

- **3D-Var: covariances d'erreur sont supposées stationnaires et représentatives de l'erreur de prévision moyennée sur une période de quelques mois (1-3 mois)**
  - \* Variabilité spatio-temporelle de l'erreur de prévision dépend de la nature de l'écoulement (situation météorologique)
- **Filtre de Kalman: description des statistiques d'erreur de prévision se limite aux covariances**
  - \* Extension à des distributions de probabilités plus générales requiert de l'information sur les moments statistiques d'ordre supérieur (Lorenc, 1986; Tarantola, 2005)
  - \* van Leeuwen, P.J. and G. Evensen, 1996: Data assimilation and inverse methods in terms of a probabilistic formulation. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 2898-2913.
- **Erreurs de prévision et d'observation sont supposées être non-biaisées.**

## Le problème variationnel

**Théorème de Bayes:** 
$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x})P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{y})}$$

• **Exemple:**

- o Erreur d'observation et de prévision sont décrites par des distributions gaussiennes

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{1}{C_3} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))\right\}$$

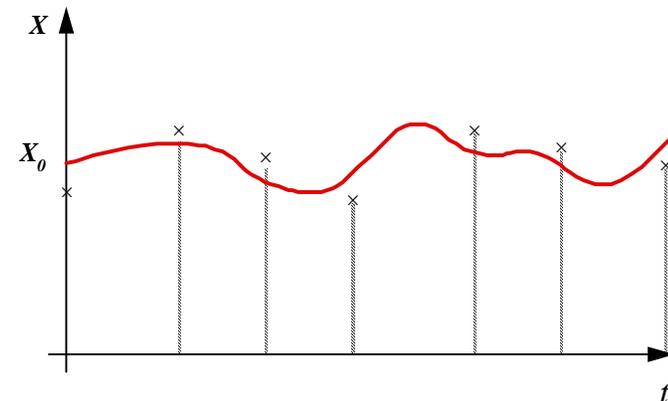
$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{C} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)\right\}$$

- o  $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  est gaussienne seulement si  $\mathbf{H}$  est linéaire
- o Mode of the distribution est obtenu en minimisant:

$$J(\mathbf{x}) = -\ln p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$$

- Réduction de  $J(\mathbf{x})$  augmente la probabilité que  $\mathbf{x}$  soit la valeur exacte

## Assimilation variationnelle (4D-Var)



**Préconditionnement par changement de variable**

**Définition:**

$$\xi = \mathbf{B}^{-1/2} \delta \mathbf{x}$$

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \xi \equiv \mathbf{G} \xi$$

Fonction objective:

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \xi^T \xi + \frac{1}{2} (\mathbf{H}' \mathbf{L} \mathbf{G} \xi - \mathbf{y}')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}' \mathbf{L} \mathbf{G} \xi - \mathbf{y}')$$

• **Extension au 4D**

- opérateur d'observation inclut maintenant l'intégration du modèle du temps  $t_0$  à  $t_i$ , le temps d'observation:  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} \mathbf{L}$
- Propagateur:  $\delta \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{L}(t_0, t_i) \delta \mathbf{x}(t_0)$

**Approche incrémentale**

Linéarisations successives par rapport à une trajectoire générée par le modèle complet

- Minimisation de fonctions quadratiques

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}' \delta \mathbf{x} - \mathbf{y}')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}' \delta \mathbf{x} - \mathbf{y}') \\ \equiv \frac{1}{2} \xi^T \xi + \frac{1}{2} (\mathbf{H}' \mathbf{B}^{1/2} \xi - \mathbf{y}')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}' \mathbf{B}^{1/2} \xi - \mathbf{y}')$$

où

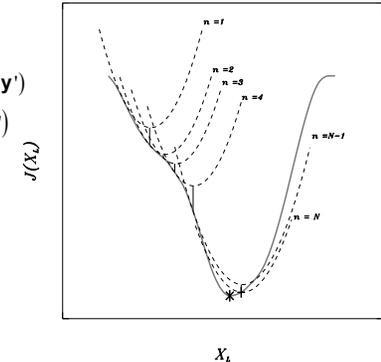
$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \xi$$

$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b$  : incrément

$\mathbf{H}' = \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{x}$  : linéaire tangent de l'opérateur d'observation

$\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)$ :

vecteur d'innovation (écart entre l'observation et l'état de référence à haute résolution)



Laroche et Gauthier (1998)

**Assimilation variationnelle 4D**

• **Définition de la mesure de l'écart aux observations**

$$J(\mathbf{X}_0) = \sum_{i=0}^N \langle \mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i, \mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i \rangle$$

\* Ici  $\langle F, G \rangle$  représente un produit scalaire.

\* Exemples:  $\langle F, G \rangle = F^T G$

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{S} \int_S F(x, y) G(x, y) dx dy$$

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_S \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Psi_2 dS$$

• Dans tous les cas, dans la forme discrétisée, on peut écrire

$$\langle F, G \rangle = F^T \mathbf{Q} G$$

• Variation de la fonctionnelle  $J(\mathbf{X}_0)$ :

$$\delta J(\mathbf{X}_0) = J(\mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}_0) - J(\mathbf{X}_0) \equiv \langle \delta \mathbf{X}_0, \nabla J(\mathbf{X}_0) \rangle$$

**Calcul du gradient avec le modèle adjoint**

• **Variation de la fonctionnelle**

$$\delta J(\mathbf{X}_0) \equiv \sum_{i=0}^N \langle \mathbf{H} \delta \mathbf{X}(t_i), (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i) \rangle \\ = \sum_{i=0}^N \langle \delta \mathbf{X}(t_i), \mathbf{H}^* (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i) \rangle \\ = \sum_{i=0}^N \langle R(t_0, t_i) \delta \mathbf{X}_0, \mathbf{H}^* (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i) \rangle \\ = \sum_{i=0}^N \langle \delta \mathbf{X}_0, R^*(t_0, t_i) \mathbf{H}^* (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i) \rangle \\ = \left\langle \delta \mathbf{X}_0, \sum_{i=0}^N R^*(t_0, t_i) \mathbf{H}^* (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i) \right\rangle$$

• Expression pour le gradient

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} J(\mathbf{X}_0) = \sum_{i=0}^N R^*(t_0, t_i) [\mathbf{H}^* (\mathbf{H}\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{y}_i)]$$

**Modèle linéaire tangent et modèle adjoint**  
(LeDimet et Talagrand, 1986)

- **Modèle direct** :  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$
- **Modèle linéaire tangent**:  $\frac{d\delta\mathbf{X}}{dt} = \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}_R(t))\right)\delta\mathbf{X}$
- **Modèle adjoint** :  $\frac{d\delta^*\mathbf{X}}{dt} = -\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}_R(t))\right)^* \delta^*\mathbf{X}$

•  $\mathbf{R}^*(t_0, t) = \mathbf{S}(t, t_0) =$  intégration à rebours du modèle adjoint

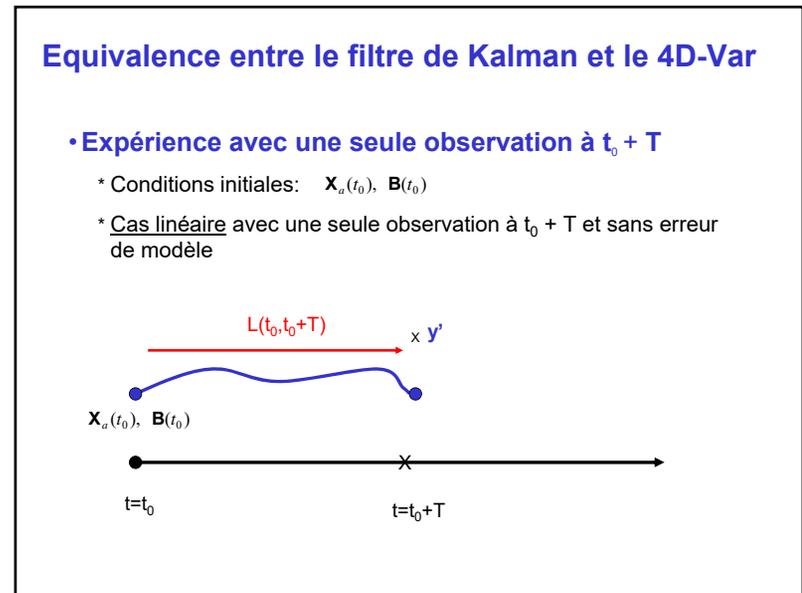
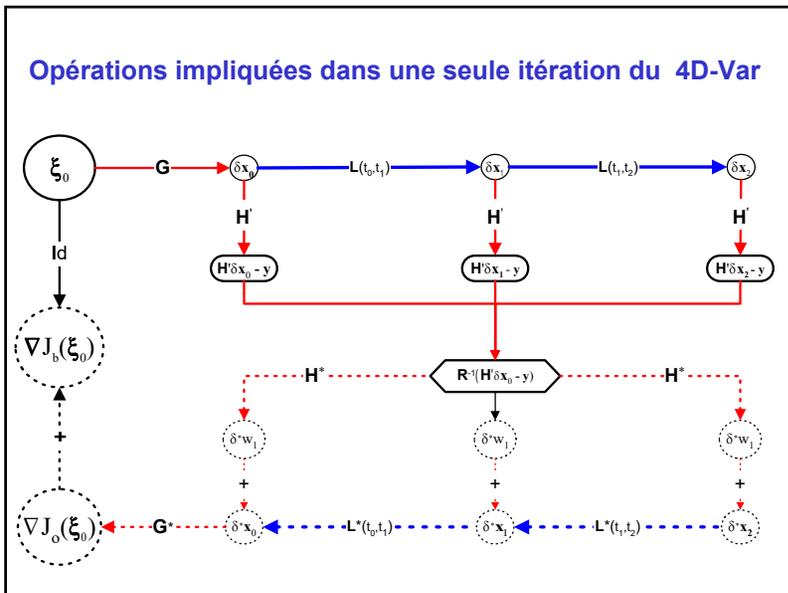
**Exemple: modèle de Lorenz**

- **Modèle direct**

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sigma(-X + Y), \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ, \end{aligned}$$
- **Modèle linéaire tangent (MLT)**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & +\sigma & 0 \\ -Z_R(t)+r & -1 & -X_R(t) \\ Y_R(t) & X_R(t) & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{pmatrix}$$
- **Modèle adjoint**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta^* X \\ \delta^* Y \\ \delta^* Z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sigma & -Z_R(t)+r & Y_R(t) \\ +\sigma & -1 & X_R(t) \\ 0 & -X_R(t) & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{pmatrix}$$



**Equivalence entre le filtre de Kalman et le 4D-Var**

- Incrément d'analyse du filtre de Kalman**  

$$\Delta X_a(t_0 + T) = \mathbf{B}(t_0 + T) \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B}(t_0 + T) \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y}(t_0 + T) - \mathbf{H} \mathbf{X}_a(t_0 + T))$$

$$= (\mathbf{L} \mathbf{B}_0 \mathbf{L}^T)^T \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} (\mathbf{L} \mathbf{B}_0 \mathbf{L}^T)^T \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y}(t_0 + T) - \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{X}_a(t_0))$$
- \* Ici  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(t_0, t_0 + T)$  est le propagateur du système linéaire
- Incrément d'analyse du 4D-Var**  

$$\Delta X_a(t_0) = \mathbf{B}_0 (\mathbf{L}^T \mathbf{H}^T) (\mathbf{R} + (\mathbf{H} \mathbf{L}) \mathbf{B}_0 (\mathbf{L}^T \mathbf{H}^T))^{-1} (\mathbf{y}(t_0 + T) - \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{X}_a(t_0))$$

$$\Delta X_a(t_0 + T) = \mathbf{L} \Delta X_a(t_0)$$

$$= (\mathbf{L} \mathbf{B}_0 \mathbf{L}^T)^T \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} (\mathbf{L} \mathbf{B}_0 \mathbf{L}^T)^T \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y}(t_0 + T) - \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{X}_a(t_0))$$
- Incréments d'analyse sont identiques à la fin de l'intervalle d'assimilation

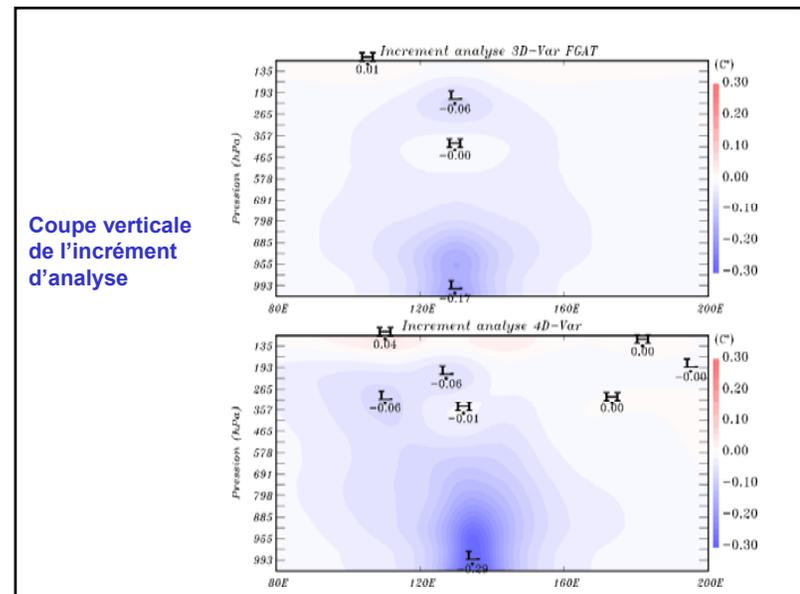
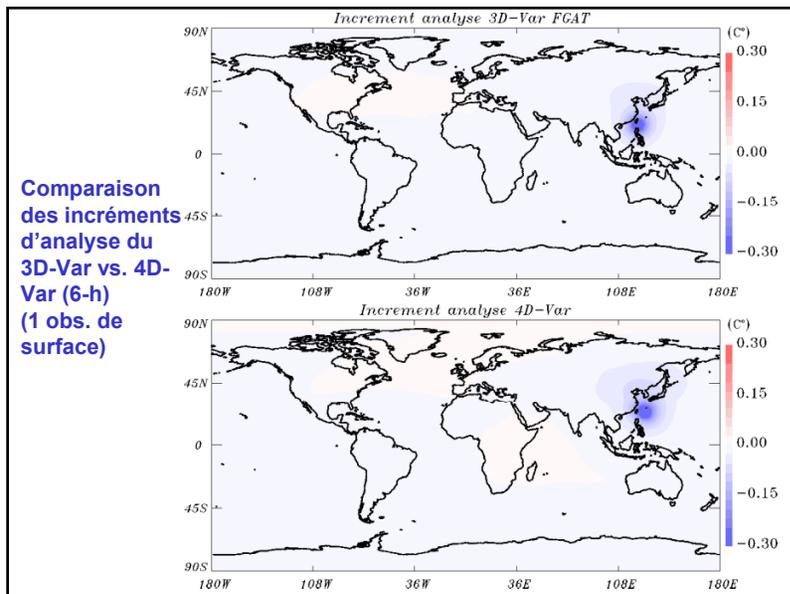
- Integration of the operational model
  - Initial Conditions:  $X_0^{(k)} = X_0^{(k-1)} + \Delta X_0^{(k-1)}$
  - Computation of observation departures  $y' = y - \mathbf{H} X^{(k)}(t)$
  - Definition of the trajectory  $X(t)$  that defines the TLM and the adjoint model

**Boucles internes et externes d'un 4D-Var incrémental**

Minimization of the incremental problem

- Use a simplified model (resolution and physical parameterizations)

$\Delta X_0^{(k)} = \mathbf{h}^{-1} \delta x_0^{(k)}$



**Vecteurs singuliers**

• **Lacarra et Talagrand (1988)**

- \* Identifier les perturbations aux conditions initiales qui conduiraient à la plus grande erreur de prévision

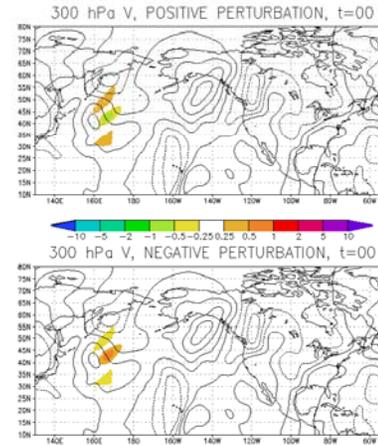
$$E(t) = \langle \delta \mathbf{e}(t), \delta \mathbf{e}(t) \rangle = \langle R(t_0, t) \delta \mathbf{e}_0 | R(t_0, t) \delta \mathbf{e}_0 \rangle$$

$$= \langle \delta \mathbf{e}_0 | R^*(t_0, t) R(t_0, t) \delta \mathbf{e}_0 \rangle$$

• **Vecteurs singuliers: vecteurs propres de  $L = R^*(t_0, t)R(t_0, t)$**

- \* Calcul des vecteurs propres ne nécessite que d'être en mesure de calculer  $L \mathbf{v}_0$  (méthode de Lanczos)
- \* Vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres sont donc celles qui conduiront à la plus grande erreur de prévision.

**THORPEX-Related Research at NRL**  
**Rapidly Growing Perturbations**



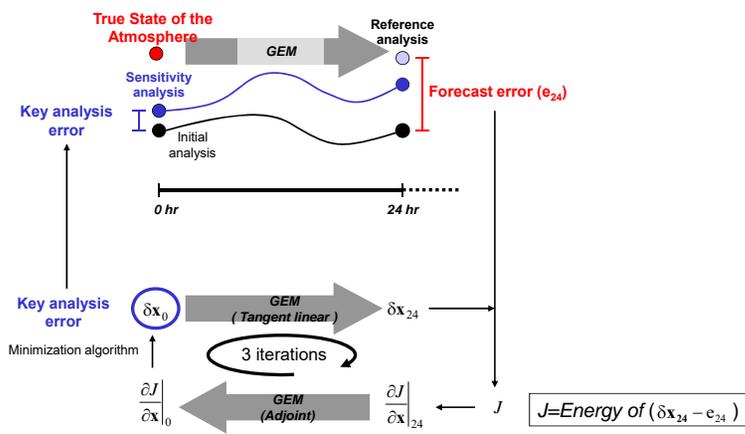
(from Carolyn Reynolds, NRL, 2003)

Perturbations (like errors), propagate rapidly.  
Mid-latitude synoptic scales basically linear out to three days.

300-mb meridional wind nonlinear perturbations based on the leading 72-h Singular Vector

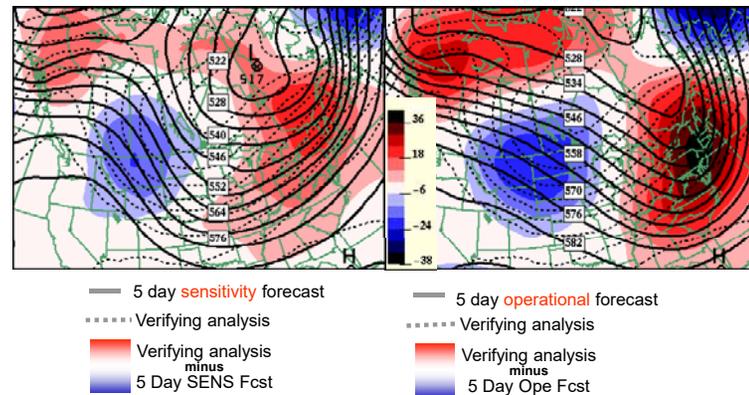
**Key analysis errors algorithm – configuration**

(Laroche *et al.*, 2002)

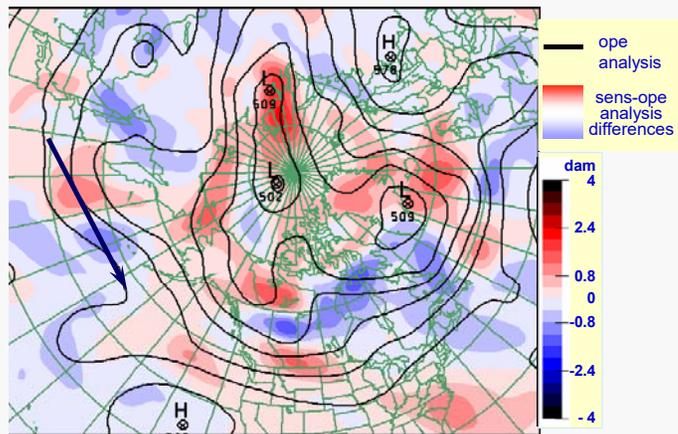


**5 day Forecast Verification valid on 6 october 2000, 00z (Laroche *et al.*, 2002)**

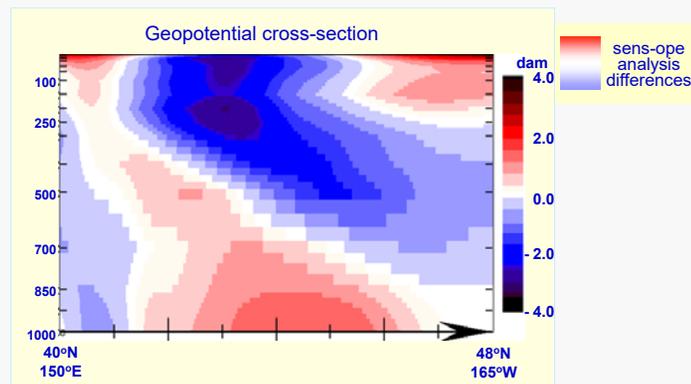
GZ 500 hPa



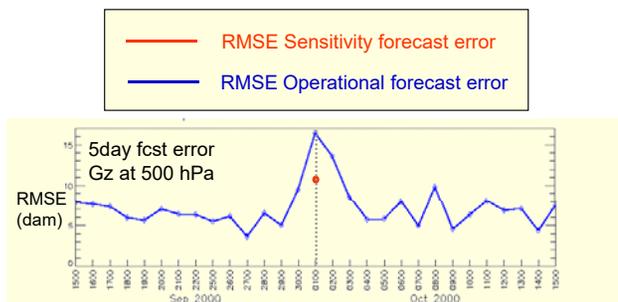
0 hr sensitivity corrections GZ 500



Sensitivity corrections for 1 october 2000 over central Pacific



Verification of the 5 day sensitivity forecast



Mise en passe parallèle  
du cycle d'assimilation de données 4D-Var  
pour le système de prévisions global

par

Stéphane Laroche, Pierre Gauthier, Monique Tanguay  
Simon Pellerin, Josée Morneau, Pierre Koclas, Nils Ek

Réunion du Comité des Passes Opérationelles et Parallèles  
12 novembre 2004

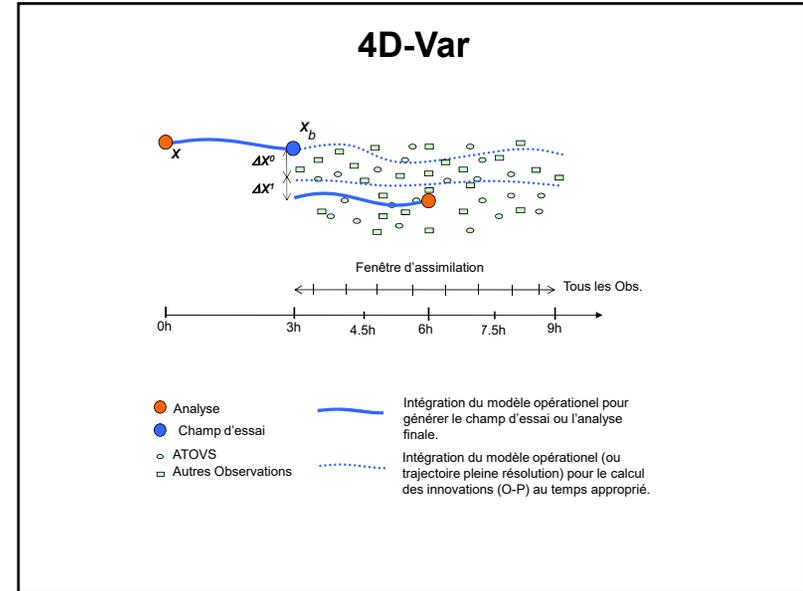
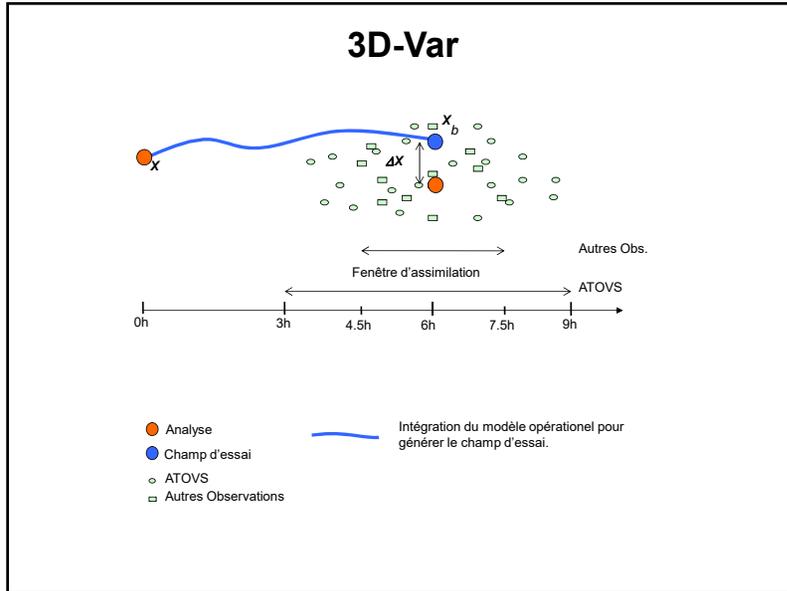
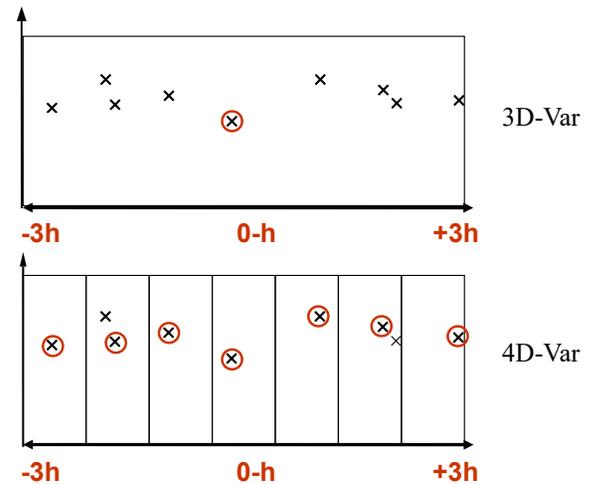


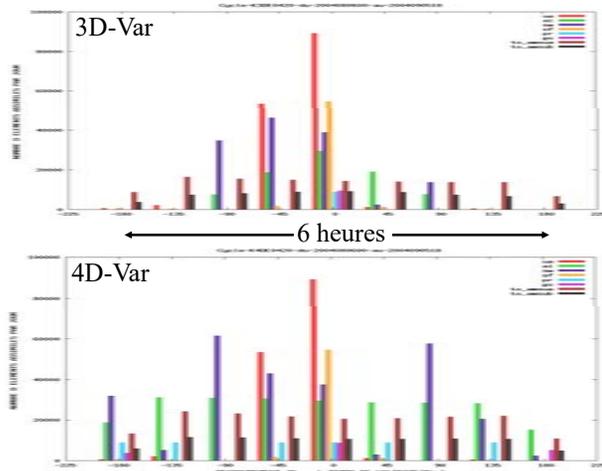
Tableau IV : Principales étapes d'analyse à 00Z et 12Z pour la prévision moyen échéance, suivant le calcul du champ d'essai.

Temps après heure synoptique	3D-Var	4D-Var
2h30		-Préparation des observations -Background check
2h38		-Première boucle externe $J(\xi^0), \nabla J(\xi^0)$ -40 boucles internes (itérations) -Physique simplifiée : -Diffusion verticale
3h00	-Préparation des observations -Background check	
3h10	-Une boucle externe $J(\xi^0), \nabla J(\xi^0)$ environ 100 boucles internes (itérations)	-Calcul de $M(X^1)$ -Ajout des observations (2h30-3h10) -Background check
3h15		-Deuxième boucle externe $J(\xi^1), \nabla J(\xi^1)$ -30 boucles internes (itérations) -Physique simplifiée : -Diffusion verticale -SGO -Précipitation stratiforme -Convection
3h25	-Calcul : $X = X_b + S^{-1} B^{1/2} \xi^0$	
3h45		
3h50		-Calcul : $X = M_{3h}(X_b + S^{-1} B^{1/2} (\xi^0 + \xi^1))$

#### Sélection temporelle des observations



Quantité de données typique sur la fenêtre d'assimilation



### Cycles d'assimilation expérimentaux

Périodes: 11 décembre 2003 - 11 février 2004  
15 juillet 2004 - 15 septembre 2004

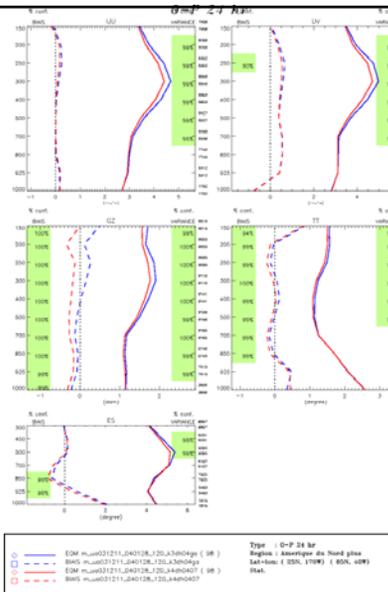
#### Configuration du contrôle 3D-Var

- Opérationnelle g2 (avec nouvelles observations);
- Prévisions à partir d'analyses avec temps de coupure g2;
- Masque GA corrigé (comme pour le 4D-Var).

#### Cycle d'hiver 2003-2004

Vérification contre observations  
24h  
sur l'Amérique du Nord

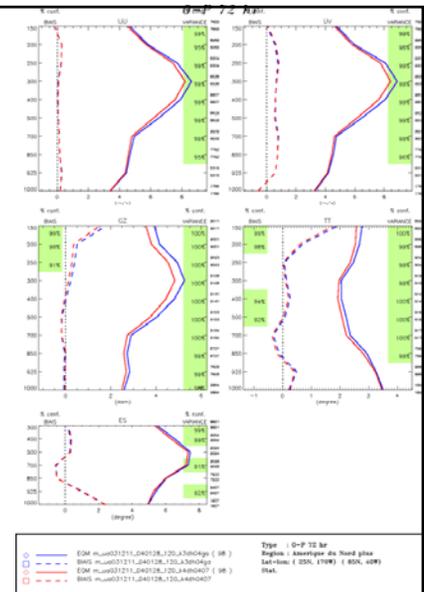
— 3D-Var  
— 4D-Var

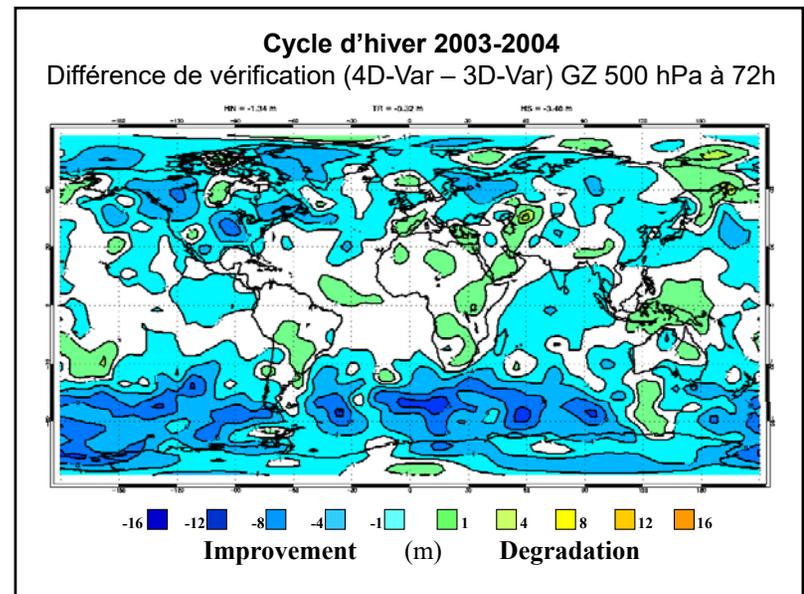
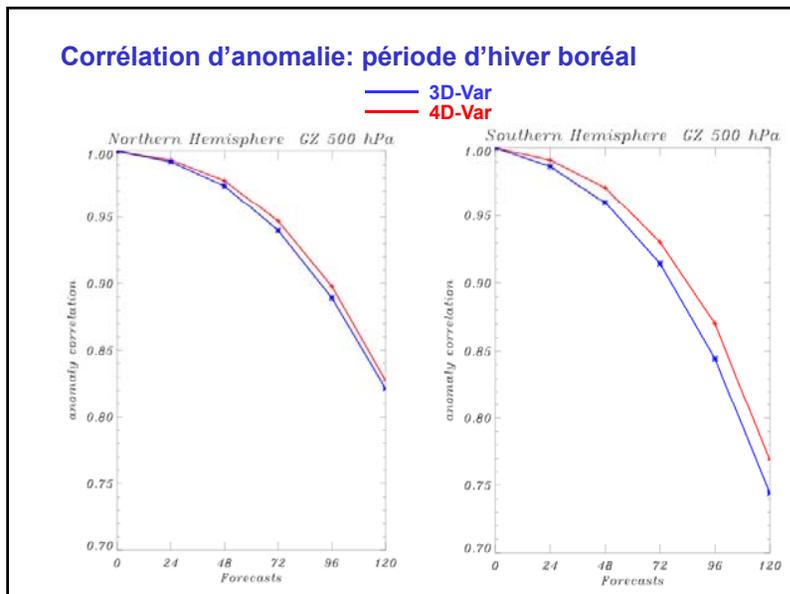
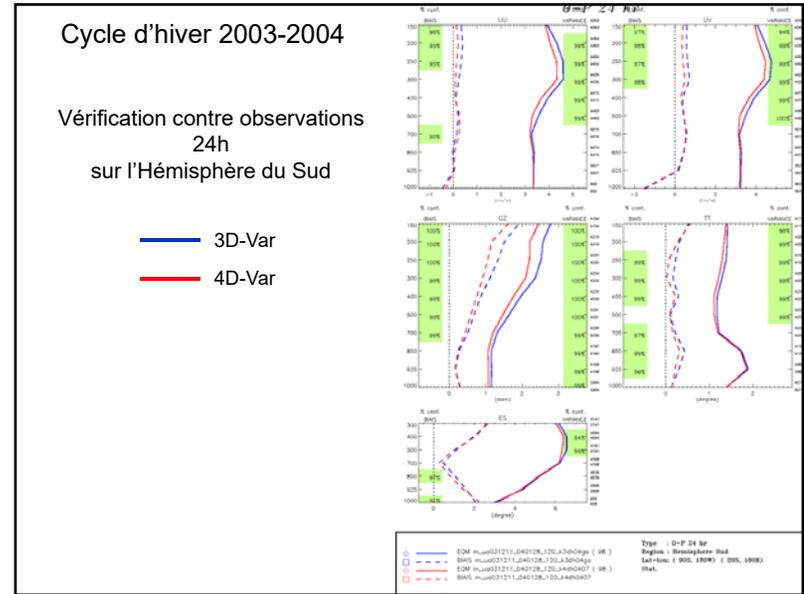
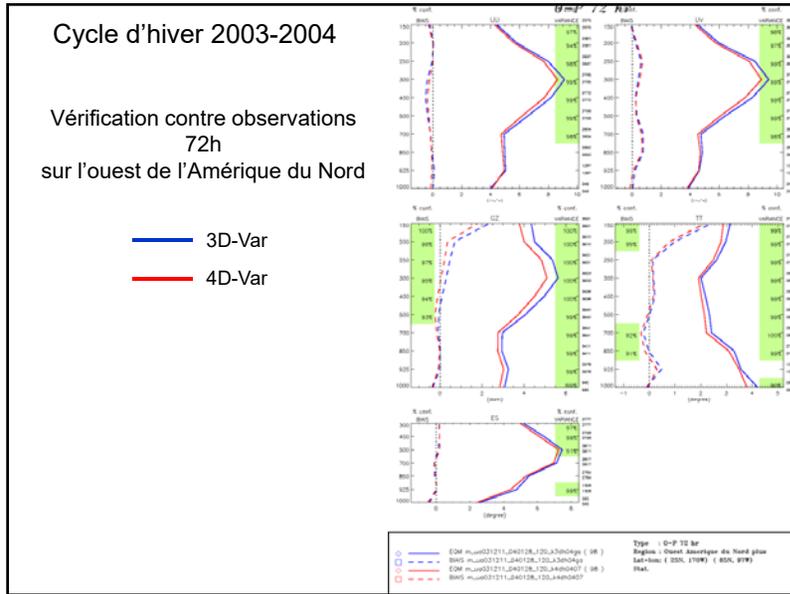


#### Cycle d'hiver 2003-2004

Vérification contre observations  
72h  
sur l'Amérique du Nord

— 3D-Var  
— 4D-Var





## Conclusion

### • 4D-Var

- Permet de prendre en compte la dimension temporelle (e.g., séries temporelles de traceurs ou de pression de surface)

### • Imbrique le modèle de prévision dans le processus d'assimilation

- Modèle est considéré « parfait » ce qui impose des limites sur la longueur de la fenêtre d'assimilation (<12-h)
- Extension pour inclure l'erreur de modèle (4D-Var en contrainte faible) (Trémolet, 2009; El Akkraoui et Gauthier, 2010; Metref et Gauthier, 2011)

### • 4D-Var hybride

- Covariances d'erreur de prévision du 4D-Var sont spécifiées par un filtre de Kalman d'ensemble (Buehner et al., 2010)